**Sucesiones y Progresiones**

En este trabajo se define progresión o sucesión numérica o matemática, los tipos básicos y el término general. También, se mencionan las progresiones aritméticas y geométricas (diferencia, razón y término general). Se incluyen ejemplos y problemas resueltos.

**Sucesión numérica o matemática**

Una sucesión numérica, es una secuencia ordenada de números que puede ser finita o infinita: a1, a2, a3, … an. A cada uno de los números se le denomina término de la sucesión. El subíndice indica el lugar que el término ocupa en la sucesión. El término general es an, yes un criterio que nos permite determinar cualquier término de la sucesión.

**Ejemplos:**

a. La sucesión de los números impares es una secuencia infinita: 1, 3, 5, 7, 9, ,... El primer término es a1 = 1 y el quinto término es a4 = 7. El término general es an = 2n-1

b. La sucesión 1, 2, 3, 4 y 5 es finita (sólo consta de cinco términos). El segundo término es a2 = 2 y el cuarto es a4 = 4. El término general es an = n

**Tipos básicos de progresiones o sucesiones matemáticas**

Si (an+1 ≥ an) la sucesión es **Creciente**. Cada término es mayor o igual que el término que le precede. Ejemplo: 1,2,3,3,4,…

Si (an+1 > an) la sucesión es **Estrictamente Crecientes.** Cada término es mayor que el término que le precede. Ejemplo: 1,2,3,4,…

Si (an+1 ≤ an) la sucesión es **Decreciente. C**ada término es menor o igual que el término que le precede. Ejemplo: 5,4,3,3,2,1,1…

Si (an+1<an) la sucesión es **Estrictamente Decreciente. C**ada término es menor que el término que le precede. Ejemplo: 4,3,2,1

Si (an+1 = an) la progresión es **Constante. T**odos los términos son iguales. Ejemplo: 2,2,2,,…

**Alternada:** Es cuando el signo del término siguiente, es distinto al signo del término anterior. Ejemplo: 1, -2, 4, -8, 16,…

Hay otras como: las monótonas, acotadas, acotadas inferiormente, acotadas superiormente, convergentes, divergentes, etc.

**Término general de una sucesión matemática**

El **término general** de una sucesión numérica es **an**, que permite conocer cada término en función de su posición n. ejemplo: an = 2n − 1, an = n2.

**Problema 1**

Determinar si la siguiente sucesión es finitas o infinitas y si es crecientes, decreciente, constante o alternada.

S = 0, 2, 4, 6, 8, 10,...

**Solución**

Es **infinita:** no tiene límite de términos**. Es creciente**: cada término es el anterior + 2.

**Problema 2**

Deducir los siguientes dos términos que siguen en la siguiente sucesión infinitas. ¿es creciente, decreciente o alternada?

S = 320, -160, 80, -40, 20,...

**Solución**

**Es alternada:** Cada término es el anterior dividido entre 2 y cambiando su signo.

El sexto término es a6 = −10 y el séptimo es a7=5.

**Problema 3**

Calcular los dos primeros términos de la progresión an = 3n − 1 a partir de su término general. Decir si es creciente, decreciente, constante o alternada

**Solución**

**Progresión *a*:** **an = 3n − 1**

El primer término es a1 = 3⋅1 − 1 = 2

El segundo término es a2 = 3⋅2 − 1 = 5

**Es una sucesión creciente: 2, 5,,...**

**Progresión o sucesión aritmética**

Una progresión **aritmética** es una [sucesión](https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_matem%C3%A1tica) de números tal que, cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número constante “d” llamado diferencia de la progresión, es decir, a1, a2 = a1 + d; a3 = a2 + d; … an = an-1 + d.

Ladiferencia entre dos valores consecutivos es: **d = (an+1 – an ) o** **d = (an - a1)/(n - 1)**.

**Ejemplos:**

100, 105, 110, es una sucesión aritmética de diferencia d = +5

1, 4, 9, 16, **no** es una progresión aritmética porque, el segundo término se obtiene sumando 3 al primero, no ocurre lo mismo con los siguientes.

**El término general de una progresión aritmética**

El término general **a n {\displaystyle a\_{n}} an** de una progresión aritmética cuyo primer término es **a 1 {\displaystyle a\_{1}} a1** y la diferencia es **d**, está definido por la siguiente fórmula:

**an = a1 + (n - 1)da n = a 1 + ( n − 1 ) ⋅ d {\displaystyle a\_{n}=a\_{1}+(n-1)\cdot d}**

El termino general **an** de una progresión aritmética, si se conoce el valor que ocupa cualquier **otro término** de la progresión el está dado por:

**an = ak + (n – k) d**

**Tipos básicos de progresiones o sucesiones aritméticas**

Si la diferencia **d** **> 0,** la progresión es **Creciente**. Cada término es mayor que el término que le precede. Ejemplo: 3,5,7,9. Diferencia constante d = +2

Si la diferencia **d** **= 0,** la progresión es **Nula**. Cada término es igual que el término que le precede. Ejemplo: 2,2,2,2. Diferencia constante d = 0

Si la diferencia **d** **< 0**, la progresión es **Decreciente**. Cada término es menor que el término que le precede. Ejemplo: 5,2,-1,-4. Diferencia constante d = -3

**Problema 4**

Calcular los dos términos siguientes de la sucesión S = 0, 6, 12,...., sabiendo que es aritmética con diferencia d = 6

**Solución**

Cada término se obtiene sumando 6 al término anterior. **an = an-1 + d**. Hay que calcular los término cuarto y quinto

**Solución**

a4 = a3 + 6 = 12 + 6 = 18

a5 = a4 + 6 = 18 + 6 = 24

**Problema 5**

¿Cuál de las siguientes progresiones **no** es aritmética?

1. 3, 2, 1, 0, -1, ...
2. 0, 4, 16, 64, ...

**Solución:**

la diferencia “d”, debe ser constante. d = an – an-1

a. d = 2 – 3 = -1; d = 1 – 2 = -1. Es aritmética con diferencia constante d = −1

b. d = 4 – 0 = 4; d = 16 – 4 = 12. **no** es una progresión aritmética porque la diferencia entre

términos sucesivos no es constante

..

**Problema 6**

Calcular la diferencia de la siguiente progresión aritmética. ¿Cuál es el quinto de la misma?

1. 11, 14, 17, 20,...

**Solución**

Para calcular la diferencia d usamos:d = an – an-1**,** y para los términos an = an-1 + d

**a. Progresión *a*:** 11, 14, 17, 20,...

d = a2 – a1 = 14 – 11 = 3

d= a3 – a2 = 17 – 14 = 3

La diferencia es **d = 3**

El cuarto término es a4 = 20

El quinto término es: a5 = a4 + d = 20 + 3 => a5 = 23

**Problema 7**

Calcular la fórmula general de la progresión aritmética S = 11, 14, 17, 20; cuya diferencia d = 3 y el primer término es a1 = 11

**Solución**

El término general se calcula por la formula an = a1 + d(n – 1)

El Término general es:

an = 11 + 3(n – 1) =11 + 3n – 3 => **an = 8 + 3n**

**Suma de los términos de una progresión aritmética**

La suma de términos equidistantes es igual a la suma de los extremos.

**ai + aj = a1 + an**

a3 + an–2 = a2 + an–1 = a1 + an

La suma de los n primeros valores de una progresión aritmética finita conocidos el primer término (a1) y el término enésimo (an) de la sucesión, está dada por la fórmula.

**Sn = (a1 + an)n/2.**

La suma de los n primeros términos a partir del primero y de la diferencia, está dada por la fórmula

**Sn = n.a1 +(d.n.(n - 1))/2**

**S:** es la notación de sumatoria

**a1:** es el primer término, **an:** es el último,

**n:** número de términos

**Problema 8**

Calculamos la suma de los 5 primeros términos de la sucesión de los pares.

**Sin aplicar la fórmula**: S5 = a1 + a2 + a3 + a4 + a5 = 2 + 4 +6 +8 +10 => **Sn = 30**

**Aplicando las fórmulas:** Sn = (a1 + an)n/2 y Sn = n.a1+(d.n.(n - 1))/2

Como el primer término es a1=2 y el quinto es a5=10 y la diferencia d = 2, la suma es:

a.. Sn = (2 + 10)5/2 = 12.5/2 =60/2 => **Sn = 30**

b. Sn = 5.2+(2.5(5-1))/2 = 10+(10(4/2)) = 10+10 (2) => **Sn = 30**

**Progresión o sucesión geométrica**

Una progresión es **geométrica** si cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo “r” llamada razón y el término cualquiera es

**an = an-1.r.** (a1, a2 = a1.r, a3 = a2.r,… an = an-1.r)

**Ejemplos:**

1, 3, 9, 27, 81 r = **an / an-1;** r = 3/1 = 3, r **=** 9/3 = 3;sucesión geométrica de razón r = 3

**El término general de una progresión o sucesión geométrica es:**

El término general an, conocidos el primer término es a1 y la razón r, está dado por:

**an = a1 . r (n-1)**

El termino general **an,** conocido el valor que ocupa cualquier **otro término** de la progresión está dado por:

**an = ak · rn–k**

**Tipos básicos de progresiones o sucesiones geométricas**

**En Una progresión geométrica cuyo primer término es positivo es**

Si **r > 1**, la progresión es **Creciente.** Ejemplo: laS= 1, 2, 4; r = 2,

Si **0 < r < 1**, la progresión es **Decreciente.** Ejemplo: S= 2, 1, 0.5; r = 0,5

**En Una progresión geométrica cuyo primer término es negativo, es**

Si **0 < r < 1**, la progresión es **Creciente.** Ejemplo: S= -1, -0.5, -0.25; r = 0,5

Si **r > 1**, la progresión es **Decreciente.** Ejemplo: laS= -1, -2, -4; r = 2

Si **r = 1**, la progresión es **constante.** Ejemplo: S = 2, 2, 2; r = 1

Si **r < 0,** la progresión es **alternada,** es decir, la progresión cambia de signo en cada término. Ejemplo: S = 1, -2, 4, -8; r = −2.

**Problema 9**

Calcular los dos términos siguientes de la sucesión sabiendo que es geométrica, con razón r = 3. la sucesión ¿creciente o decreciente?

1. 5, 15, …

**Solución**

Para calcular los términos usamos: **an = an-1.r**

**Sucesión *a***: 5, 15,...

El tercero y cuarto término son:

a3 = a2. r =15.3 => a3 = 45

a4 = a3. r = 45.3 => a4 = 135

La sucesión es **creciente.**

**Problema 10**

¿Cuál de las siguientes progresiones **no** es geométrica?

1. 2, 6, 18, 54, ... es geométrica, la razón es constante r = 3. (6/2 = 3; 18/6 = 3)
2. 3, 9, -9, -18, .. **no** es una progresión geométrica porque, no tiene una razón constante;

r = 9/3 = 3, r = -9/9 = -1

**Problema 11**

1. Calcular la razón y el término general de progresión S = 4, 12, 36, ...

**Solución**

La razón se calcula por: **r = an / an-1** y termino generalpor: **an = a1 . r(n-1)**

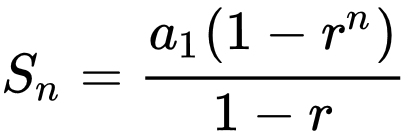
r = 12/4 = 3

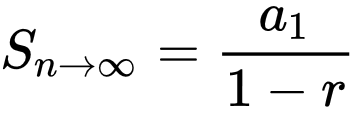
r = 36/12 = 3

La razón es **r = 3**

El término general es: **an = 4 . 3 (n-1)**

**Suma de los términos de una progresión geométrica**

La suma S n = a 1 + a 2 + a 3 + ⋯ + a n {\displaystyle S\_{n}=a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+\cdots +a\_{n}} de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r es: S n = a 1 ( 1 − r n ) 1 − r {\displaystyle S\_{n}={\frac {a\_{1}(1-r^{n})}{1-r}}}

La suma de todos los términos de una progresión geométrica con r < 1, es:

